

Hausübung 11

Prof. Dr. Olaf Lechtenfeld, Daniel Westerfeld

Aufgabe 1: Zwei Teilchen im Kasten

(4 Punkte)

Wir betrachten zwei nicht-wechselwirkende Teilchen, welche sich in einem eindimensionalen Kasten der Länge L mit unendlich hohen Wänden befinden. Welches sind die vier tiefsten Energie-Eigenzustände dieses Zwei-Teilchen-Systems? Geben Sie die Entartungen dieser vier Energieniveaus an für (a) unterscheidbare Teilchen (b) identische Bosonen und (c) identische Fermionen.

Erinnerung: Die Ein-Teilchen-Energieniveaus für den unendlich hohen Kasten lauten $E_n = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2mL^2} n^2$.

Aufgabe 2: Die CHSH-Ungleichung

(2+3+1=6 Punkte)

Leiten Sie eine zur Bell-Ungleichung analoge Ungleichung für vier mögliche Messrichtungen her, die sogenannte CHSH-Ungleichung (nach Clauser, Horne, Shimony und Holt): Gegeben seien Observable A, B, C, D , deren Messwerte a, b, c, d jeweils $+1$ oder -1 sein können.

[HÜ 2.1] Zeigen Sie, dass bei gleichzeitigem Vorliegen der vier Messwerte stets gilt

$$(a + c)b - (a - c)d = \pm 2$$

und daher für die Erwartungswerte der Observablen die CHSH-Ungleichung

$$|\langle AB \rangle + \langle BC \rangle + \langle CD \rangle - \langle DA \rangle| \leq 2.$$

[HÜ 2.2] Die Observablen von Beobachter 1 seien $A = \sum_{i=x,y,z} \alpha_i \sigma_{1i} \otimes \mathbb{1}_2$ und

$C = \sum_{i=x,y,z} \gamma_i \sigma_{1i} \otimes \mathbb{1}_2$ (Spinmessung in Richtung der Einheitsvektoren $\vec{\alpha}$ bzw. $\vec{\gamma}$); für Beobachter

2 lauten die entsprechenden Observablen $B = \sum_{i=x,y,z} \beta_i \mathbb{1}_1 \otimes \sigma_{2i}$ und $D = \sum_{i=x,y,z} \delta_i \mathbb{1}_1 \otimes \sigma_{2i}$

(Spinmessung in Richtung $\vec{\beta}$ bzw. $\vec{\delta}$). Der Einfachheit halber sollen alle Vektoren in einer Ebene liegen.

Formulieren Sie die CHSH-Ungleichung für den Singlettzustand

$$|\text{sing}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \{ |\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle \},$$

indem Sie ihre linke Seite durch die Winkel zwischen $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$, $\vec{\gamma}$ und $\vec{\delta}$ ausdrücken. Überlegen Sie sich Winkel, bei denen die Ungleichung verletzt wird. Nennen Sie den physikalischen Grund für die Verletzung.

Erinnerung: $\langle \text{sing} | AB | \text{sing} \rangle = -\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$ etc.

[HÜ 2.3] Zeigen Sie, dass eine lineare Korrelation $\langle AB \rangle = 1 - \frac{2}{\pi} \angle(\vec{\alpha}, \vec{\beta})$ die Ungleichung erfüllt.